Méthodes Numériques Appliquées
3ème Licence

USHTB 2009–2010
Génie des Procédés

Devoir 1 c

/4/10

NOM : Key GROUPE : ______________________

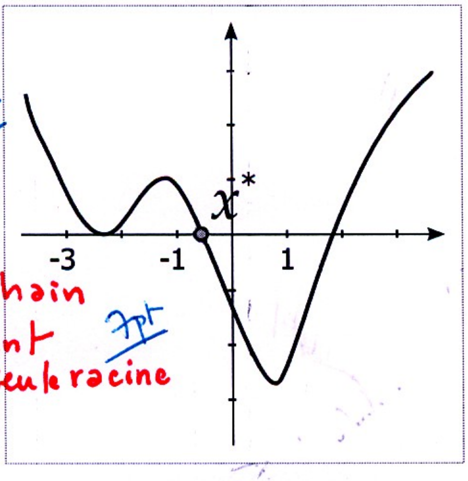
PRENOM : ______________________ ENSEIGNANT : ______________________

Les livres et les cahiers ne sont pas autorisés.

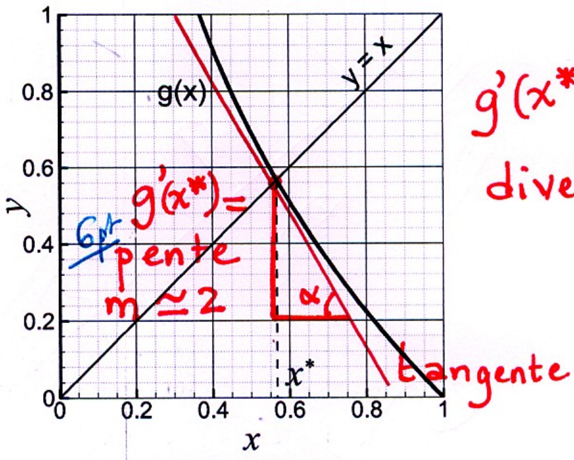
INSTRUCTIONS : *Il y a 4 exercices pour un total de 100 points. Ecrivez votre réponse finale sur la feuille de test. Si vous n'avez pas assez d'espace pour un exercice, écrivez sur le verso de la feuille précedente. Montrez toutes les étapes du calcul. Encadrez votre résultat final. Supportez votre réponse par des explications si nécessaire.*

Exercice 1 (*25pts*) `Convergence des Méthodes Itératives.` Dites si la méthode converge ou non avec les conditions indiquées dans chaque cas de figure:

Oui
Converge 5pt
car
[-1,1] prochain
encadrement 7pt
contient 1 seule racine



(a) Dichotomie avec $[a, b] = [-3, 1]$



(b) Itérations successives

2pt
$g'(x^*) > 1$
diverge 5pt

Exercice 2 (*25pts*) Vrai ou Faux. Encadrez la réponse correcte:

-3.5 pt par réponse fausse !

(1) Si x_0 est trés proche de x^*, la méthode de Newton converge toujours. (V / F)
(2) Si $f(a)f(b) < 0$ et f continue dans l'intervalle $[a, b]$, l'équation $f(x) = 0$ peut avoir deux racines dans $[a, b]$. (V / F)
(3) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ admet un zero simple et un zero double. (V / F)
(4) Une méthode itérative dont l'erreur absolue e_n prend les valeurs successives 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-6}, 10^{-8}, 10^{-10} est une méthode d'ordre deux. (V / F)

(5) Le plus petit nombre réel normal sur un PC 32 bits est 1.47×10^{-39}. (V / F)

(6) Pour éviter l'overflow lors du calcul de $x^2 - y^2$, il est préférable d'utiliser la formule équivalente $(x-y)(x+y)$. (V / F)

(7) Sur un ordinateur stockant les nombres réels en base décimale (10) avec $\epsilon_{\text{mach}} = 10^{-5}$, et $-20 < e < 20$ (e exposant), on a $10^{26}/10^{24} = 10^2$ F

Exercice 3 (*20pts*) Equations non-linéaires. Utilisez la méthode des itérations successives $x_{k+1} = g(x_k)$ pour calculer la racine $x^* = \sqrt{c}$ de l'équation $x^2 - c = 0$. Calculer x_2 si on prend $x_0 = 4$, $c = 2$, et $g(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{c}{x}\right)$.

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{c}{x_k}\right) \quad 4$$

12

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{c}{x_0}\right) = 2.25 \quad 4$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{c}{x_1}\right) = 1.5694 \quad 4$$

(2) Vérifiez la convergence avec le test $\frac{|x_2 - x_1|}{|x_2|} \leq 0.1$

8

$$\frac{|1.569444 - 2.25|}{|1.569444|} = 0.43 > 0.1$$

2 2 2

La convergence n'est pas atteinte ! 2

Exercice 4 (*25pts*) Déterminez la valeur de $p(x)$ avec la première formule ci-dessous pour $x = 1.37$. Utilisez 3 chiffres significatifs avec troncature pour tous vos calculs. Repétez l'opération avec la deuxième forme du même polynôme. Calculez l'erreur relative en (%) pour chaque cas si la valeur exacte est $p(1.37) = 0.043053$. Expliquez vos résultats.

$$p(x) = x^3 - 7x^2 + 8x - 0.35 \qquad\qquad p(x) = ((x-7)x+8)x - 0.35$$

1ere forme 10

$$p(1.37) = (1.37)^3 - 7(1.37)^2 + 8(1.37) - 0.35 \quad 1$$
$$= (1.37)^2 1.37 - 7(1.87) + 10.9 - 0.35 \quad 2$$
$$= \underbrace{2.56 - 13.0} + 10.9 - 0.35 \quad 2$$
$$= -10.4 + 10.9 - 0.35 \quad 1$$
$$= 0.5 - 0.35 \quad 1$$
$$= 0.15 \quad 1$$

$$\text{erreur} = \frac{0.15 - 0.043}{0.043} \times 100 = 250\% \quad 2$$

2eme forme 10

$$p(1.37) = ((1.37-7)1.37+8)1.37 - 0.35 \quad 1$$
$$= ((-5.63)1.37+8)1.37 - 0.35 \quad 2$$
$$= (-7.71+8)1.37 - 0.35 \quad 2$$
$$= (0.29)1.37 - 0.35 \quad 1$$
$$= 0.397 - 0.35 \quad 1$$
$$= 0.047 \quad 1$$

$$\text{erreur} = \frac{0.047 - 0.043}{0.043} \times 100 = 9.3\% \quad 2$$

Explication 2.5

Les erreurs de troncature lors des operations de puissance, addition, multiplication ont detruit la solution.

2.5

Le nombre d'operations plus petit que dans la forme 1 favorise une meilleure solution.