Le 22 janvier 2012

EXAMEN DE MECANIQUE DES FLUIDES INCOMPRESSIBLES MDFI

Ecoulement d'un film tombant

Un liquide incompressible et newtonien de propriétés physiques ρ et μ ruisselle, sous l'effet de la pesanteur, le long d'une plaque plane verticale de très grande largeur. On supposera que la longueur de l'écoulement (c'est-à-dire, la dimension verticale de la plaque) est très grande par rapport à l'épaisseur du film. On admettra également que le frottement de la couche de liquide sur l'air environnant est négligeable.

On notera x la coordonnée verticale descendante comptée le long de la plaque et y la coordonnée transversale ; u et v désigneront respectivement les projections du vecteur vitesse sur ces deux axes. On notera enfin $\delta(x)$ l'épaisseur locale du film liquide.

1. Expliquer pourquoi les équations de Navier-Stokes s'écrivent sous la forme simplifiée suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 & (1) \\ u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} = g + \nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} & (2) \end{cases}$$

(Attention, aucune démonstration n'est demandée ; on se contentera d'énoncer les hypothèses et d'indiquer leurs incidences sur les termes omis).

2. Donner les conditions aux limites auxquelles doit satisfaire les composantes $u(x,y)$ et $v(x,y)$ en $y = 0$ et $y = \delta$.

Première partie : **Profils semblables**

Pour résoudre le problème, on cherche à déterminer une fonction de courant $\Psi(x,y)$ avec :

$$\begin{cases} u = \dfrac{\partial \Psi}{\partial y} \\ v = -\dfrac{\partial \Psi}{\partial x} \end{cases}$$

de la forme :

$$\Psi(x,y) = A(x)\, F(\eta)$$

Avec : $\eta = \dfrac{y}{\delta(x)}$

3. Quelle relation doit-il exister entre $A(x)$ et le débit volumique Q de liquide par unité de largeur de la plaque ? (On pourra poser que $F(1) - F(0) = Cte = 1/c$).

4. Déterminer les équations différentielles qui régissent les fonctions $\delta(x)$ et $F(\eta)$ et en déduire les conditions aux limites auxquelles doit satisfaire la fonction F.

5. Montrer que la solution $\delta(x) = Cte$ est une solution particulière satisfaisant à cette équation.

6. En déduire l'expression du champ de vitesse $u(x,y)$ en fonction de g, ν, δ et y.

7. Déterminer alors la relation entre Q, g, ν et δ.

Deuxième partie : Méthode intégrale

8. Démontrer l'équation intégrale suivante :

$$\frac{d}{dx}\int_0^{\delta} u^2\, dy = g\,\delta - \nu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\bigg|_{y=0} + \frac{d\delta}{dx} u^2(x,\delta)$$

9. Recenser les équations qui s'appliquent à la fonction $u(x,y)$ et montrer que si l'on veut représenter cette fonction par une approximation polynomiale, on doit se limiter à une forme quadratique :

$$u(x,y) = a_0(x) + a_1(x)\eta + a_2(x)\eta^2 \qquad \text{avec} \qquad \eta = \frac{y}{\delta(x)}$$

10. Déterminer les expressions des coefficients $a_k(x)$ en fonction du ***débit volumique Q*** et de δ.

11. Donner alors l'expression du champ de vitesse en fonction de Q, δ et de η.

12. Etablir l'équation différentielle à laquelle conduit l'équation intégrale de la question 8.

13. Montrer que quel que soit sa valeur $\delta(0)$ à l'origine des axes, la fonction $\delta(x)$ tendra nécessairement vers une limite finie unique δ^* que l'on exprimera en fonction des données du problème.

CORRECTION DETAILLEE
DE L'EXAMEN DE MDFI

Première partie : Profils semblables

1. La largeur b de la plaque étant très grande par rapport à la longueur L de la plaque, on supposera par conséquent, l'écoulement identique dans tout plan transversal yOx :

$$b >> L \rightarrow \begin{cases} V_z = w \equiv 0 & (3.1) \\ \dfrac{\partial V_i}{\partial z} \equiv 0 & (3.2) \end{cases} \quad \text{d'où, pas d'équation suivant la direction } Oz.$$

Posons : $x' = \dfrac{x}{L}$ et $y' = \dfrac{y}{\delta}$ $\quad u'(x', y') = \dfrac{u(x,y)}{U}$ et $v'(x', y') = \dfrac{v(x,y)}{V}$

L'Equation de Continuité

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{4.1}$$

$$\left[\frac{U}{L}\right]\frac{\partial u'}{\partial x'} + \left[\frac{V}{\delta}\right]\frac{\partial v'}{\partial y'} = 0 \tag{4.2}$$

d'où : $O\left(\dfrac{U}{L}\right) = O\left(\dfrac{V}{\delta}\right)$ Par conséquent $O\left(\dfrac{\delta}{L}\right) = O\left(\dfrac{V}{U}\right) = \varepsilon << 1$ (5)

Les Equations de Navier-Stokes

Suivant Ox :

$$\rho\left[u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right] = -\frac{\partial p^*}{\partial x} + \mu\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right] \tag{6.1}$$

$$\left[\frac{\rho U^2}{L}\right]u'\frac{\partial u'}{\partial x'} + \left[\frac{\rho UV}{\delta}\right]v'\frac{\partial u'}{\partial y'} = -\frac{\partial p^*}{\partial x} + \left[\frac{\mu U}{L^2}\right]\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \left[\frac{\mu U}{\delta^2}\right]\frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \tag{6.2}$$

$$\left[\frac{\rho U^2}{L}\right]\left(u'\frac{\partial u'}{\partial x'} + v'\frac{\partial u'}{\partial y'}\right) = -\frac{\partial p^*}{\partial x} + \left[\frac{\mu U}{\delta^2}\right]\left(\cancel{\varepsilon^2\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2}} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}\right) \tag{6.3}$$

$$\left[\frac{\rho U^2}{L}\right]\left(u'\frac{\partial u'}{\partial x'} + v'\frac{\partial u'}{\partial y'}\right) = -\frac{\partial p^*}{\partial x} + \left[\frac{\mu U}{\delta^2}\right]\frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \tag{6.4}$$

Suivant Oy :

$$\rho\left[u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right] = -\frac{\partial p^*}{\partial y} + \mu\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right] \tag{6.5}$$

$$\left[\frac{\rho UV}{L}\right]u'\frac{\partial v'}{\partial x'} + \left[\frac{\rho V^2}{h_0}\right]v'\frac{\partial v'}{\partial y'} = -\frac{\partial p^*}{\partial y} + \left[\frac{\mu V}{L^2}\right]\frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \left[\frac{\mu V}{h_0^2}\right]\frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} \tag{6.6}$$

$$\left[\frac{\rho UV}{L}\right]\left(u'\frac{\partial v'}{\partial x'} + v'\frac{\partial v'}{\partial y'}\right) = -\frac{\partial p^*}{\partial y} + \left[\frac{\mu V}{h_0^2}\right]\left(\varepsilon^2\frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2}\right) \tag{6.7}$$

$$\left[\frac{\rho UV}{L}\right]\left(u'\frac{\partial v'}{\partial x'}+v'\frac{\partial v'}{\partial y'}\right)=-\frac{\partial p^*}{\partial y}+\left[\frac{\mu V}{h_0^2}\right]\frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} \qquad (6.8)$$

Comparons l'ordre de grandeur des composantes des forces d'inertie $(F.I)_i$ et celles des forces visqueuses $(F.V)_i$:

$$\frac{o(F.I)_y}{o(F.I)_x}=\frac{\dfrac{\rho UV}{L}}{\dfrac{\rho U^2}{x}}=\varepsilon(x)<<1 \qquad \frac{o(F.V)_y}{o(F.V)_x}=\frac{\dfrac{\mu V}{\delta^2}}{\dfrac{\mu U}{\delta^2}}=\varepsilon(x)<<1 \qquad (7)$$

d'où : $\dfrac{o(\partial p^*/\partial y)_y}{o(\partial p^*/\partial x)_x}=\varepsilon(x)<<1$ (8)

Tous les termes de la projection de l'équation de Navier-Stokes suivant la direction Oy sont négligeables (avec $g_y \equiv 0$) :

$$0=-\frac{\partial p^*}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\rho g_y \qquad (9.1)$$

$$0=-\frac{\partial p}{\partial y} \qquad (9.2)$$

Conclusion :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial y}{\partial y}=0 & (1) \\ \rho\left[u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}\right]=-\dfrac{\partial p}{\partial x}+\rho g_x+\mu\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} & (2) \\ 0=-\dfrac{\partial p}{\partial y} & (3) \end{cases}$$

Montrons à présent que la pression statique dans le film liquide est uniforme.

i) Au vue de (3), on peut dire que la pression statique est indépendant de y. En d'autres termes, la pression statique au sein du film est identique sur tout plan horizontal.

ii) Montrons à présent que p est aussi indépendant de x. Pour cela, utilisons ***la continuité du champ des contraintes à l'interface (air-liquide)***. En effet :

$$\sigma_{xy}\, n_y^{air}=-\sigma_{xy}\, n_y^{colle} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} p^{air}(x,\delta)=p^{colle}(x,\delta) & (10) \\ \left|\tau_{xy}^{air}\right|_\delta=\left|\tau_{xy}^{colle}\right|_\delta & (11) \end{cases}$$

Par conséquent, *selon la direction* ***normale*** *à la couche (Oy)*, nous avons égalité des pressions statiques de part et d'autre de l'interface. Cependant, comme nous l'avons vu plus haut, la pression statique est indépendante de y, d'où :

$$p^{air}(x)=p^{colle}(x) \qquad (12)$$

La pression motrice de l'air ambiant est quasiment au repos, donc constante, nous avons alors :

$$p^{air}(x) = p_{air}* - \rho_{air}\, g\, x \approx Cte \qquad (13)$$

Donc, la seule variation de la pression statique correspond à celle de $(\rho_{air}\, g\, x)$ que l'on peut négliger devant la pression motrice de l'air ambiant (p_a* = 101325 Pa).

Par ailleurs, on avait dit que $p^{air}(x) = p^{colle}(x)$, par conséquent, $p^{colle}(x) = Cte$, c'est à dire que la pression statique dans la couche est constante suivant la direction Ox. p est donc ***uniforme*** au sein du film, par conséquent sont gradient est nul. On obtient alors le système (avec g_x = + g) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial y} = 0 & (1) \\ u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} = g + \nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} & (2) \end{cases}$$

2. ***A la paroi*** :

$u(x,0) = 0$ (d'après la condition de non-glissement) (14.1)

$v(x,0) = 0$ (d'après la condition de non-pénétration) (14.2)

A l'interface liquide-air :

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=\delta} = 0 \qquad (14.3)$$

$v(x, \delta) = 0$ (14.4)

3. $$Q = \int_0^\delta u\, dy = \int_0^\delta \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = A(x)[F(1) - F(0)] = A(x)/c \qquad (15)$$

$A(x) = c\, Q$ d'où $\psi = c\, Q\, F(\eta)$ (16)

4. $$u(x,\eta) = \frac{\partial}{\partial y}\left[cQ\ F(\eta)\right]\frac{\partial \eta}{\partial \eta} = \frac{cQ}{\delta(x)}F'(\eta)$$

$$u(x,\eta) = \frac{cQ}{\delta(x)}F'(\eta) \qquad (17)$$

$$v(x,\eta) = -\frac{\partial}{\partial x}\left[cQF(\eta)\right] = -cQ\left[\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{dF}{d\eta}\right]$$

$$v(x,\eta) = cQ\frac{\delta'(x)}{\delta(x)}\eta F'(\eta)$$

(18)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{cQ}{\delta(x)}F'(\eta)\right] = -\frac{cQ\delta'(x)}{\delta^2(x)}F'(\eta) - \frac{cQ\delta'(x)}{\delta^2(x)}\eta F''(\eta)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{cQ\delta'(x)}{\delta^2(x)}\left[F'(\eta) + \eta\ \ F''(\eta)\right] \qquad (19)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{cQ}{\delta(x)}F'(\eta)\right) = \frac{cQ}{\delta^2(x)}F''(\eta) \qquad (20)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{cQ}{\delta^2(x)}F''(\eta)\right]\frac{\partial \eta}{\partial \eta} = \frac{cQ}{\delta^3(x)}F'''(\eta) \qquad (21)$$

L'Equation de Navier-Stokes (2) s'écrit alors sous la forme suivante :

$$\left[\frac{cQ}{\delta(x)}F'\right]\left[-\frac{cQ\delta'(x)}{\delta^2(x)}\left[F'+\cancel{\eta F''}\right]\right]+\cancel{\left[\frac{cQ\delta'(x)}{\delta(x)}\eta F'\right]\left[\left(\frac{cQ}{\delta^2(x)}\right)F''\right]} = g+\nu\left(\frac{cQ}{\delta^3(x)}\right)F'''$$

$$-\frac{c^2Q^2\delta'(x)}{\delta^3(x)}F'^2(\eta) = g+\frac{\nu cQ}{\delta^3(x)}F'''(\eta)$$

$$F'''(\eta)+\left[\frac{cQ}{\nu}\delta'(x)\right]F'^2(\eta)+\left[\frac{\delta^3(x)}{\nu cQ}\right]g = 0 \qquad (22)$$

Conditions aux limites sur $F(\eta)$:

Pour $\eta = 0$ on a : $F'(0) = 0$ (22.1)

Pour $\eta = 1$ on a : $F''(1) = 0$ (22.2)

5. L'hypothèse des profils de vitesse semblables impose une solution de l'équation différentielle (21) indépendante de l'abscisse x et ne dépendant strictement que de η. En appelant C_1 et C_2 les coefficients de (21), on peut tirer trois équations, la première portant sur $F(\eta)$ et les deux autres sur $\delta(x)$:

$$F'''(\eta)+C_1F'^2(\eta)+C_2 = 0 \qquad (22.3)$$

$$\begin{cases} \dfrac{cQ}{\nu}\delta'(x) = C_1 & (22.4) \\[2ex] \dfrac{g\delta^3(x)}{\nu cQ} = C_2 & (22.5) \end{cases}$$

La solution $\delta(x) = Cte$ est une solution particulière satisfaisant à cette équation. En effet, si $\delta = Cte$, on a $C_1 = 0$ (en d'autres termes : $\delta' = 0$). On arrive alors à :

6. $$F'''(\eta) == -C_2 = -\frac{g\delta^3(x)}{\nu cQ}. \text{ Soit : } \frac{dF''(\eta)}{d\eta} = -C_2 \qquad (23)$$

L'intégration première de (22) donne :

$$F''(\eta) = -C_2\eta + C_3 \qquad (24)$$

Une seconde intégration conduit à :

$$F'(\eta) = -\frac{C_2}{2}\eta^2 + C_3\eta + C_4 \qquad (25)$$

Or, pour $\eta = 0$ on a : $F'(0) = 0$. A partir de (25), on a $C_4 = 0$ (26.1)

et pour $\eta = 1$ on a : $F''(1) = 0$. A partir de (24), on a $C_3 = C_2$ (26.2)

$$F'(\eta) = -\frac{C_2}{2}\eta^2 + C_2\eta = -\frac{C_2}{2}\left(\eta^2 - 2\eta\right) \qquad (27)$$

Soit en variables dimensionnelles : $u(x,\eta)\dfrac{\delta(x)}{cQ} = -\dfrac{g\delta^3(x)}{2\nu cQ}\left[\left(\dfrac{y}{\delta}\right)^2 - 2\left(\dfrac{y}{\delta}\right)\right]$

$$u(x,\eta) = -\frac{g\delta^2(x)}{2\nu}\left[\left(\frac{y}{\delta}\right)^2 - 2\left(\frac{y}{\delta}\right)\right] = -\frac{g}{2\nu}\left(y^2 - 2\delta y\right) \tag{28}$$

7. $$Q = \int_0^\delta -\frac{g}{2\nu}\left(y^2 - 2\delta y\right)dy = \frac{1}{3}\frac{g\delta^3}{\nu} \tag{29}$$

Soit : $$Q = \frac{g\delta^3}{3\nu} \tag{30}$$

Deuxième partie : Méthode intégrale

8. Intégrons l'équation (2) suivant y entre $y = 0$ et $y = \delta(x)$:

$$\int_0^\delta u\frac{\partial u}{\partial x}dy + \left[\int_0^\delta v\frac{\partial u}{\partial y}dy\right] = \int_0^\delta g\,dy + \int_0^\delta \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy \tag{31.1}$$

$$\int_0^\delta u\frac{\partial u}{\partial x}dy + \left[\int_0^\delta \frac{\partial(u\,v)}{\partial y}dy - \int_0^\delta u\frac{\partial v}{\partial y}dy\right] = g\delta + \int_0^\delta \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial y}\right)dy \tag{31.2}$$

$$\int_0^\delta u\frac{\partial u}{\partial x}dy + \left[(u\,v)\Big|_0^\delta - \int_0^\delta u\left(-\frac{\partial u}{\partial x}\right)dy\right] = g\delta + \left(\nu\frac{\partial u}{\partial y}\right)\Bigg|_0^\delta \tag{31.3}$$

$$\int_0^\delta 2u\frac{\partial u}{\partial x}dy = g\delta - \nu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\Bigg|_{y=0} \tag{31.4}$$

$$\int_0^\delta \frac{\partial u^2}{\partial x}dy = g\delta - \nu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\Bigg|_{y=0} \tag{31.5}$$

D'après le Théorème de Leibniz : $$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,y)\,dy = \int_{a(x)}^{b(x)}\frac{\partial f}{\partial x}dy + \frac{db}{dx}f\left[x,b(x)\right] - \frac{da}{dx}f\left[x,a(x)\right] \tag{32}$$

le premier terme de l'équation (31.5) s'écrit sous la forme suivante :

$$\int_0^\delta \frac{\partial u^2}{\partial x}dy = \frac{d}{dx}\int_0^\delta u^2\,dy - \frac{d\delta}{dx}u^2(x,\delta) \tag{33}$$

Par conséquent, l »équation intégrale prend la forme suivante :

$$\frac{d}{dx}\int_0^\delta u^2\,dy = g\delta - \nu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\Bigg|_{y=0} + \frac{d\delta}{dx}u^2(x,\delta) \tag{34}$$

9. $$u(x,0) = 0 \tag{35.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}\Bigg|_{y=\delta} = 0 \tag{35.2}$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{y=0} = -\frac{g}{\nu} \tag{35.3}$$

Cette dernière équation s'obtient en satisfaisant l'équation de Navier-Stokes en y = 0 (et pour laquelle u(x,0) = v(x,0) = 0) : $\left[u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = g + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]_{y=0} \longrightarrow \left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{y=0} = -\frac{g}{\nu}$

10. $$u(x,y) = a_0(x) + a_1(x)\eta + a_2(x)\eta^2 \tag{36}$$

$$u(x,0) = a_0(x) + 0 + 0 = 0 \tag{37}$$

$$\left.\frac{1}{\delta}\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|_{\eta=1} = \left.\frac{1}{\delta}\left[a_1(x) + 2a_2(x)\ \ \eta\right]\right|_{\eta=1} = a_1(x) + 2a_2(x) = 0 \tag{38}$$

$$\left.\frac{1}{\delta^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right|_{\eta=0} = \left.\frac{1}{\delta^2}\left[2a_2(x)\right]\right|_{\eta=0} = -\frac{g}{\nu} \tag{39}$$

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 + 2a_2 = 0 \\ a_2 = -\dfrac{g\delta^2}{2\nu} \end{cases} \qquad a_0 = 0\ ;\ a_2 = -\frac{g\delta^2}{2\nu} = -\frac{3Q}{2\delta}\ ;\ a_1 = \frac{g\delta^2}{\nu} = \frac{3Q}{\delta} \tag{40}$$

$$u(x,y) = -\frac{g\delta^2}{2\nu}\left[\left(\frac{y}{\delta}\right)^2 - 2\left(\frac{y}{\delta}\right)\right] = -\frac{g}{2\nu}\left(y^2 - 2\delta y\right) \tag{41}$$

Calcul du débit volumique Q :

$$Q = \int_0^\delta -\frac{g}{2\nu}\left(y^2 - 2\delta y\right) dy = \frac{1}{3}\frac{g\delta^3}{\nu} = Cte \tag{42}$$

L'épaisseur δ de la couche se conserve par conséquent tout le long de l'axe des abscisses (δ = Cte).

$$u(x,y) = -\frac{3Q}{2\delta}\left(\eta^2 - 2\eta\right) \tag{43}$$

Deuxième méthode : La dernière condition aux limites (35.3) pourrait être remplacée par l'équation de conservation du débit volumique Q pour un fluide incompressible. En effet, on a :

$$Q = \int_0^\delta u(x,y)\ dy = \int_0^1 \left[a_0(x) + a_1(x)\eta + a_2(x)\eta^2\right]\delta dy$$

$$\left[a_0(x)\eta + a_1(x)\frac{\eta^2}{2} + a_2(x)\frac{\eta^3}{3}\right]_0^1 = a_0(x) + \frac{1}{2}a_1(x) + \frac{1}{3}a_2(x) = \frac{Q}{\delta}$$

On a alors :

$$u(x,0) = a_0(x) + 0 + 0 = 0 \tag{37}$$

$$\left.\frac{1}{\delta}\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|_{\eta=1} = a_1(x) + 2a_2(x) = 0 \tag{38}$$

$$a_0(x) + \frac{1}{2}a_1(x) + \frac{1}{3}a_2(x) = \frac{Q}{\delta} \tag{39}$$

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = -2a_2 \\ \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}a_2 = \frac{Q}{\delta} \end{cases} \qquad a_0 = 0\ ;\ a_2 = -\frac{3Q}{2\delta}\ ;\ a_1 = \frac{3Q}{\delta} \tag{40*}$$

$$u(x,y) = -\frac{3Q}{2\delta}\left(\eta^2 - 2\eta\right) \tag{43}$$

11. Injectons l'expression du profil de vitesse $u(x,y) = -\frac{g\delta^2}{2\nu}\left(\eta^2 - 2\eta\right)$ dans l'équation intégrale : $\frac{d}{dx}\int_0^\delta u^2\,dy = g\delta - \nu\left.\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right|_{y=0} + \frac{d\delta}{dx}u^2(x,\delta)$ (44)

$$\frac{d}{dx}\int_0^1\left[-\frac{g\delta^2}{2\nu}\left(\eta^2 - 2\eta\right)\right]^2 \delta\,d\eta = g\delta - \nu\left.\left(\frac{1}{\delta}\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\right|_{\eta=0} + \frac{d\delta}{dx}\left(\frac{g\delta^2}{2\nu}\right)^2 \tag{45}$$

$$\frac{d}{dx}\int_0^1\left(\frac{g\delta^2}{2\nu}\right)^2\left(\eta^4 + 4\eta^2 - 4\eta^3\right)\delta\,d\eta = g\delta - g\delta + \frac{d\delta}{dx}\left(\frac{g\delta^2}{2\nu}\right)^2 \tag{46}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{g^2\delta^5}{4\nu^2}\right)\frac{1}{5} + \frac{4}{3} - 1\right] = \frac{d\delta}{dx}\left(\frac{g^2\delta^4}{4\nu^2}\right) \longrightarrow \frac{8}{15}\frac{d\delta^5}{dx} - \delta^4\frac{d\delta}{dx} = 0 \tag{47}$$

$$\frac{40}{15}\delta^4\frac{d\delta}{dx} - \delta^4\frac{d\delta}{dx} = \frac{5}{3}\delta^4\frac{d\delta}{dx} = 0 \tag{48}$$

$$\begin{cases} \delta = 0 & (49.1) \\ \text{et / ou} \\ \frac{d\delta}{dx} & (49.2) \end{cases}$$

La première solution est à écarter étant donné que la Couche limite, a en tout point, une épaisseur finie différente de zéro étant donné qu'il effectivement ruissellement du liquide le long des parois verticales. La seconde solution suppose que épaisseur δ de la couche limite constante quelque soit x . En d'autres termes, quel que soit sa valeur $\delta(0)$ à l'origine des axes, la fonction $\delta(x)$ tendra nécessairement vers une limite finie unique δ^* :

$$\delta^* = \left(\frac{3\nu Q}{g}\right)^{1/3} \tag{50}$$