EPREUVE FINALE DE PHENOMENES DE TRANSFERT I : MECANIQUE DES FLUIDES

Vidange instationnaire d'une cuve

Considérons un liquide, assimilé à un fluide parfait incompressible de masse volumique ρ, remplissant une cuve cylindrique de section droite A_1, dans laquelle la vitesse du fluide est V_1 (vitesse que l'on prendra positive).

La cuve est prolongée à sa base par un tuyau rectiligne de section droite A_2, et de longueur L (Figure 1). On notera h la hauteur de la surface libre du liquide dans la cuve, au-dessus de l'axe du tuyau.

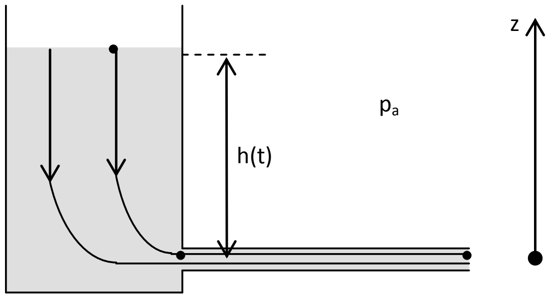


Figure 1 : La cuve en cours de vidange.

Le haut de la cuve est ouvert à l'atmosphère et l'extrémité du tuyau est obturée par un bouchon. A l'instant $t = 0$, on retire le bouchon et le liquide commence à s'échapper vers l'atmosphère avec une vitesse V_2 (valeur absolue) qui sera considérée, partout dans le tube, comme uniforme.

L'objet de ce problème est de déterminer la cinétique de vidange de cette cuve.

1. Exprimer la force motrice de l'écoulement.

2. Expliquer pourquoi le champ de vitesse du liquide dans la cuve V_1 peut être considéré comme étant unidirectionnel et uniforme.

3. Quelle hypothèse nous permet de considérer la vitesse de sortie du fluide V_2 comme uniforme sur la section droite ?

4. Ecrire le Théorème de Bernoulli en écoulement instationnaire entre la surface libre de l'eau dans le réservoir et la section A_2 où le jet débouche à l'atmosphère, en fonction de l'accélération de la pesanteur g, L, k (où $k = A_2/A_1$), V_2 et h.

L'altitude initiale du liquide dans le réservoir est h_0. On pose :

$$\beta = \frac{V_2^2}{2 g h_0} \qquad \text{et} \qquad \eta = \frac{h(t)}{h_0}$$

et on considère β comme fonction de η.

5. Montrer que l'équation différentielle précédente se met sous la forme :

$$\lambda(\eta)\frac{d\beta}{d\eta} = \alpha\beta - \eta$$

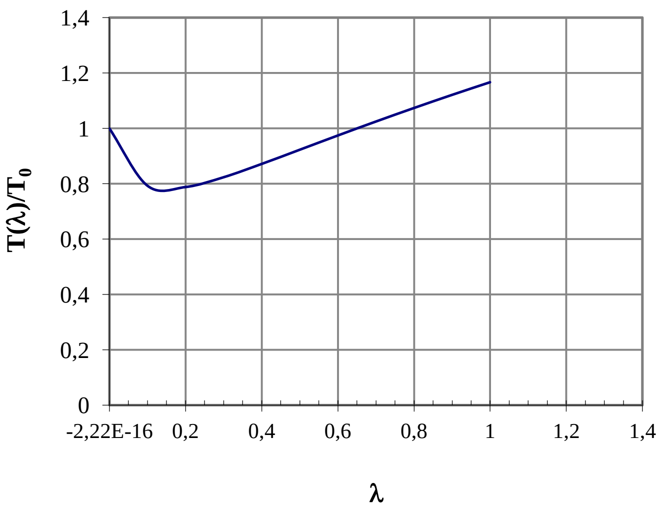
et donner les expressions de α et λ et la condition initiale de cette équation différentielle.

6. Montrer que, compte tenu des données de ce problème, on peut approximer α à 1 et assimiler $\lambda(\eta)$ à une constante λ_0 avec $\lambda_0 = (k\,L/h_0)$.

7. Donner l'expression (sous forme intégrale) du temps de vidange total T de la cuve en fonction de k, h_0, g, et des variables réduites η et β.

8. Donner l'expression de la vitesse avec laquelle s'échappe le liquide de la cuve à travers un ***orifice percé dans la paroi***. Calculer alors la durée T_0 de la vidange en fonction des données du problème (résultats littéral et numérique).

9. La Figure 2 illustre les variations du temps de vidange *total* de la question 7 par T_0 en fonction de la longueur réduite du tuyau. Commenter cette courbe.



(T/T_0)	λ
1	0
0,793	0,10
0,780	0,13
0,788	0,20
0,824	0,30
0,872	0,40
0,923	0,50
0,975	0,60
1,025	0,70
1,074	0,80
1,121	0,90
1,167	1,00

Figure 2 : Variations du temps de vidange adimensionnel en fonction de la longueur réduite λ.

Données : Rayon du réservoir $R_1 = 8$ cm ; Rayon du tuyau $R_2 = 1$ cm ; Longueur du tuyau $L = 80$ cm ; $h_0 = 40$ cm ; $g = 9{,}81\ m^2/s$