EPREUVE PARTIELLE DE PHENOMENES DE TRANSFERT I : MECANIQUE DES FLUIDES

Vidange instationnaire d'une cuve Fermée

Considérons un liquide, assimilé à un fluide parfait incompressible de masse volumique ρ, remplissant une cuve cylindrique de section droite A_1, dans laquelle la vitesse du fluide est V_1 (vitesse que l'on prendra positive).

La cuve est prolongée à sa base par un tuyau rectiligne de section droite A_2, et de longueur L (Figure 1). Le raccordement du tuyau à la cuve est de forme ***arrondie***. On notera h la hauteur de la surface libre du liquide dans la cuve, au-dessus de l'axe du tuyau. Au-dessus de cette surface libre, on maintient une pression ***constante*** d'air qu'on notera p_0.

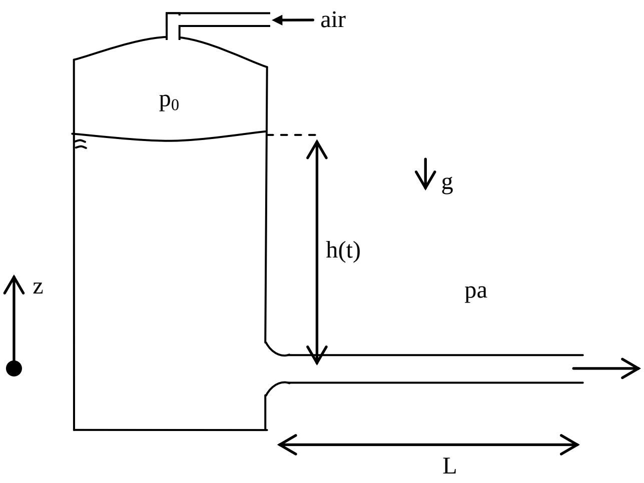

Figure 1 : La cuve en cours de vidange.

L'extrémité du tuyau est obturée par un bouchon. A l'instant $t = 0$, on retire l'obturateur et le liquide commence à s'échapper vers l'atmosphère avec une vitesse V_2 (valeur absolue).

L'objet de ce problème est de déterminer la cinétique de vidange de cette cuve.

1. Expliquer pourquoi le champ de vitesse du liquide dans la cuve V_1 peut être considéré comme étant unidirectionnel et uniforme.

2. Pourquoi choisit-on un raccord de forme arrondie pour relier le tuyau à la cuve ? Comment l'appelle-t-on ? Quelle est alors son incidence sur la vitesse de sortie du fluide V_2 ?

3. Exprimer la force motrice de l'écoulement.

4. Ecrire le Théorème de Bernoulli en écoulement instationnaire entre la surface libre de l'eau dans le réservoir et la section A_2 où le jet débouche à l'atmosphère, en fonction de l'accélération de la pesanteur g, ρ, p_0, pa, g, L, k (où $k = A_2/A_1$), V_2 et h.

On pose :

$$H = \left(\frac{p_0 - pa}{\rho g}\right) + h \qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{V_2}{\sqrt{2gH}}$$

5. Montrer alors que l'équation différentielle précédente se met sous la forme :

$$\lambda_0 \left(1 + \lambda(t)\right) \frac{d\beta}{dt} + \alpha\, \beta^2 = 1$$

et donner les expressions de α, λ_0 et $\lambda(t)$.

L'altitude initiale du liquide dans le réservoir est h_0.

6. Montrer que, compte tenu des données de ce problème, on peut approximer α à 1 et le coefficient du terme instationnaire à λ_0.

7. A l'instant $t = 0$, la tuyauterie étant pleine d'eau, on ouvre l'obturateur de la section de sortie. Donner la loi de variation de β en fonction du temps. Vers quelle valeur tend $V_2(t)$ quand $t \to \infty$, si l'on a H = 10 m ?

8. Déterminer le temps t_1 au bout duquel β atteint sa valeur limite à 0,5 %.

9. Combien dure approximativement la vidange totale de la cuve ?

10. Donner l'expression du débit massique instantané d'air $W(t)$ qu'il faudrait injecter en continu dans la cuve pour que p_0 reste constant tout au long de la vidange.

Données : Rayon du réservoir R_1 = 24 cm, Rayon du tuyau R_2 = 3 cm, Longueur du tuyau L = 4 m, h_0 = 1 m, g = 9,81 m^2/s

On rappelle la solution de l'équation différentielle suivante :

$$a\frac{dy}{dt} = b^2 - y^2(t) \Rightarrow y(t) = b\,\mathrm{th}\left(\frac{b\,t}{a} + Cte\right) \quad \text{avec : } \mathrm{th}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$