Méthodes Numériques Appliquées
3ème Licence

USHTB 2009–2010
Génie des Procédés

Examen Final

31/5/10 10:15–11:45

NOM : Key GROUPE : ______________

PRENOM : ______________ ENSEIGNANT : ______________

Les livres et les cahiers ne sont pas autorisés.

INSTRUCTIONS : *Il y a 8 exercices pour un total de 200 points. Ecrivez votre réponse finale sur la feuille de test. Si vous n'avez pas assez d'espace pour un exercice, écrivez sur le verso de la feuille précedente. Montrez toutes les étapes du calcul. Encadrez votre résultat final. Supportez votre réponse par des explications si nécessaire.*

Exercice 1 (*25pts*) `Arithmétique de l'ordinateur` La formule de Heron ci-dessous permet de calculer l'aire A d'un triangle de côtés a, b, et c. Utilisez 3 chiffres significatifs (choisissez troncature ou arrondi et indiquez votre choix) pour déterminer la surface d'un triangle de côtés $a = 8.97$, $b = 5$, et $c = 4$. Quelle est l'erreur relative si la valeur exacte est $A = 1.63$? Expliquez vos resultats.

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \qquad \text{avec} \qquad s = \frac{a+b+c}{2}$$

TRONCATURE

$$s = \frac{8.97+5+4}{2} = \frac{13.9+4}{2} = \frac{17.9}{2} = 8.95$$

$$s-a = 8.95 - 8.97 = -0.02$$
$$s-b = 8.95 - 5 = 3.95$$
$$s-c = 8.95 - 4 = 4.95$$

$$A = \sqrt{8.95(-0.02)(3.95)(4.95)}$$
$$= \sqrt{-3.49} \quad \text{impossible}$$

La formule ne marche pas. On ne peut même pas parler d'erreur.

Explication

du à l'erreur de troncature le perimètre obtenu s est plus petit que le coté a !!! d'où un resultat negatif pour s-a ....

ARRONDI

$$s = \frac{8.97+5+4}{2} = \frac{14+4}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

$8.97+5 = 13.97 = 14$ (arrondi)

$$s-a = 9 - 8.97 = 0.03$$
$$s-b = 9-5 = 4$$
$$s-c = 9-4 = 5$$

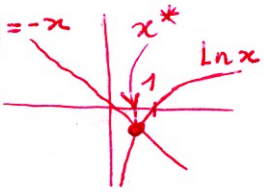
$$A = \sqrt{9(0.03)4\times5} = \sqrt{0.27\times4\times5}$$
$$= \sqrt{1.08\times5} = \sqrt{5.4} = 2.32$$

$$\text{Erreur} = \frac{2.32-1.63}{1.63}100 = 42\ \%$$

L'erreur est trés grande car les erreurs d'arrondi ~~ont~~ donné une valeur de s peu precise. La soustraction de deux nombres presques egaux s et a conduit à 1 resultat avec 1 seul chiffre significatif.

7

Exercice 2 (*25pts*) **Equations non-linéaires.** Séparez les racines de l'équation $\underbrace{x + \ln x}_{f(x)} = 0$.



① il faut que $x > 0$

② $f(x) = 0 \iff \ln x = -x$

On voit que x^* unique $\in [0,1]$

③ $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$ donc f monotone croissante

④ $f(0.1) = -1.3 < 0$ et $f(1) = 1 > 0$

donc $x^* \in [0.1, 1]$ 2

8 (2) Ecrivez l'itération de Newton pour calculer la racine $x^* \in [0, 1]$ de $\underbrace{x + \ln x}_{f(x)} = 0$.

$f(x) = x + \ln x$ 2

$f'(x) = 1 + \frac{1}{x}$ 2

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ 2

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n + \ln x_n}{1 + \frac{1}{x_n}}$$ 2

10 (3) Calculer x_1 si $x_0 = \frac{1}{2}$. Vérifiez la convergence avec le test $100 \frac{| x_1 - x^* |}{| x^* |} \leq 0.1$ et $x^* = 0.567, 143, 3$

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0 + \ln x_0}{1 + 1/x_0} = \frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{2} + \ln \frac{1}{2}}{1 + 1/\frac{1}{2}} = 0.564,382,4$$

$$\text{erreur} = \frac{0.564,382,4 - 0.567,143,3}{0.567,143,3} \times 100 = 0.5\% > 0.1 \Rightarrow$$

La convergence n'est pas encore atteinte

Exercice 3 (*25pts*) **Systèmes linéaires -- Méthode directe.** La décomposition **LU** de la matrice **A** est donnée ci-dessous. Calculez la solution **x** du système **Ax** = **b**. Donnez la valeur de det(**A**).

15

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 12 & 5.1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 19.1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b}' = \begin{bmatrix} 4.9 \\ -1.9 \\ 19 \end{bmatrix}$$

$Ax = b \iff L\underbrace{Ux}_{y} = b$ 2

① On resoud $Ly = b$ (substitution Aval) 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 19.1 \end{bmatrix}$$ 1

eq.1 $\Rightarrow y_1 = 5$ 1/2

eq.2 $\Rightarrow -5 + y_2 = -2 \Rightarrow y_2 = 3$ 1/2

eq.3 $\Rightarrow 2(5) + 3(3) + y_3 = 19.1$ 1/2

$\Rightarrow y_3 = 0.1$

$$y = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$ 1

② On resoud $Ux = y$ (Substitution Amont) 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$ 1

eq.3 $\Rightarrow x_3 = 1$ 1/2

eq.2 $\Rightarrow 2x_2 + 1 = 3 \Rightarrow x_2 = 1$ 1/2

eq.3 $\Rightarrow x_1 + 3(1) + 1 = 5$

$\Rightarrow x_1 = 1$ 1/2

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$ 1

$\det(A) = u_{11} \cdot u_{22} \cdot u_{33} = 1(2)(0.1) = \boxed{0.2}$ 2

10 (b) La solution **x**′ du système **Ax** = **b**′ est **x**′ = $(1.4, 0.5, 2)^T$. Que remarquez vous? Expliquez vos résultats (On donne $\|\mathbf{A}^{-1}\|_\infty = 90$).

On remarque qu'une petite perturbation ($b \to b'$) du second membre change la solution ($x \to x'$) du systeme $Ax = b$ avec $\frac{\|x' - x\|_\infty}{\|x\|_\infty} 100 = 100\%$!! 5

Ceci s'explique par le mauvais conditionnement de la matrice A: 5

$K(A) = \|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty = 19.1 \times 90 = 1719 >> 1$

Exercice 4 *(25pts)* `Systèmes linéaires -- Méthode itérative.` Vous devez résoudre le système $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ à l'aide de l'itération $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{Gx}^{(k)} + \mathbf{c}$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(1) Calculez les valeurs propres de G et donnez le rayon spectral $\rho(\mathbf{G})$. L'itération converge-t-elle?

Valeurs propres : $\lambda_1 = 0$ double , $\lambda_2 = -1$

Rayon spectral : $\rho(G) = \max |\lambda_i| = 1$

$\rho(G)$ n'est pas $< 1 \Rightarrow$ l'itération ne converge pas

$\det(G - \lambda I) = 0$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ 0 & -2-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^2(\lambda+1) = 0$$

(2) Si l'itération démarre de $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, calculez $\mathbf{x}^{(1)}$.

$$x^{(1)} = G\,x^{(0)} + c = G \cdot 0 + c = c = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(3) Indiquez si l'itération a convergé avec le test $\| \mathbf{r}^{(k)} \|_\infty \,/\, \| \mathbf{r}^{(0)} \|_\infty \leq \epsilon$ et $\epsilon = 10^{-1}$.

$r^{(0)} = b - A x^{(0)} = b - A \cdot 0 = b \Rightarrow \|r^0\|_\infty = \|b\|_\infty = 11$

$$r^{(1)} = b - A x^{(1)} = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 \\ 17 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\|r^{(1)}\|_\infty = 6$

$$\frac{\|r^{(1)}\|_\infty}{\|r^{(0)}\|_\infty} = \frac{6}{11} = 0.54 > 10^{-1}$$

l'iter n'a par encore convergé

Exercice 5 *(25pts)* `Systèmes non-linéaires.` Utilisez l'itération de Newton-Raphson donnée pour résoudre le système non-linéaire $x^2 + y^2 - 1 = 0$ et $\frac{1}{4}x^2 + 4y^2 - 1 = 0$.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2x^{(k)} & 2y^{(k)} \\ \frac{1}{2}x^{(k)} & 8 \end{bmatrix}}_{\mathbf{J_f}(\mathbf{x}^{(k)})} \underbrace{\begin{bmatrix} \delta_1^{(k)} \\ \delta_2^{(k)} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\delta}^{(k)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 - (x^{(k)})^2 - (y^{(k)})^2 \\ 1 - \frac{1}{4}(x^{(k)})^2 - 4(y^{(k)})^2 \end{bmatrix}}_{-\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)})} \quad \text{et} \quad \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \delta^{(k)}$$

(1) Trouvez l'erreur dans la formule (1 seule erreur).

5 $[J_f]_{22} = 8y \Rightarrow [J_f(x^{(k)})]_{22} = 8\,y^{(k)}$

(2) Calculez $\mathbf{x}^{(1)}$ si $\mathbf{x}^{(0)} = [4, 1]$:

20

$$\begin{bmatrix} 2 \cdot 4 & 2 \cdot 1 \\ \frac{1}{2} \cdot 4 & 8 \cdot 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1^{(0)} \\ \delta_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 4^2 - 1^2 \\ 1 - \frac{1}{4} 4^2 - 4 \cdot 1^2 \end{bmatrix}$$ 5

$$\begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1^{(0)} \\ \delta_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 \\ -7 \end{bmatrix}$$ 5

Solution

$\delta_1^{(0)} = -1.9$ ou $-\frac{19}{10}$

$\delta_2^{(0)} = -0.4$ ou $-\frac{2}{5}$

$$\delta^{(0)} = \begin{bmatrix} -1.9 \\ -0.4 \end{bmatrix}$$ 5

$$x^{(1)} = x^{(0)} + \delta^{(0)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1.9 \\ -0.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.1 \\ 0.6 \end{bmatrix}$$ 5

Exercice 6 (*25pts*) **Interpolation linéaire.** La tension y à travers une résistance est mesurée en fonction du courant x. Les résultats suivants sont obtenus:

i	0	1	2
x (Amp.)	0.25	0.75	1.25
y (Volts)	−0.45	−0.6	0.7

3 (1) Quel est le degré du polynome d'interpolation? 2

(2) Complétez le tableau des différences divisées ci-contre et donnez le polynome $p(x)$ sous la forme de Newton. Ecrivez le polynome sous la forme de Horner et calculez $p(2.17)$.

x	y		
0.25	-0.45		
		-0.3	
0.75	-0.6		2.9
		2.6	
1.25	0.7		

10

3 $p_2(x) = c_0 + c_1(x-0.25) + c_2(x-0.25)(x-0.75)$

3 $p_2(x) = -0.45 - 0.3(x-0.25) + 2.9(x-0.25)(x-0.75)$

Horner 4 $p_2(x) = -0.45 + (x-0.25)[-0.3 + 2.9(x-0.75)]$

$p_2(2.17) = 6.880,56$ 3

(3) Ecrivez le polynome d'interpolation sous forme standard.

$p_2(x) = 2.9x^2 + 3.2x + 0.16875$ 3

Exercice 7 (*25pts*) **Integration numérique.** Le tableau ci-contre fournit les noeuds d'intégration et les coefficients pour la quadrature de Gauss à n_p points dans l'intervalle $[-1,1]$: $\int_{-1}^{1} f(\xi)\,d\xi \approx \sum_{i=1}^{n_p} w_i f(\xi_i)$. Utilisez les données du tableau pour effectuer le travail suivant:

n_p	ξ_i	w_i	n
1	0	2	1
2	$\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$	1	3
3	0	$\frac{8}{9}$	5
	$\pm\sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{5}{9}$	

5 ① Donnez la formule de la quadrature de Gauss à deux points.

$\int_{-1}^{1} f(\xi)\,d\xi \simeq f\left(-\sqrt{\tfrac{1}{3}}\right) + f\left(\sqrt{\tfrac{1}{3}}\right)$

5 ② Utilisez la quadrature pour évaluer $I_2 = \int_{-1}^{1} \xi^2\,d\xi$.

$I_2 \simeq I_G = \left(-\sqrt{\tfrac{1}{3}}\right)^2 + \left(\sqrt{\tfrac{1}{3}}\right)^2 = \frac{2}{3}$

③ Comparez avec la solution exacte (Calculez l'erreur relative en %). Que remarquez vous? Pouvez vous expliquer vos résultats.

5 Exacte $\rightarrow I_2 = \int_{-1}^{1} \xi^2\,d\xi = \left[\frac{\xi^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$

6 Erreur = 0% $\Rightarrow$ On a trouvé la solution exacte car la

4 quadrature de Gauss à $n_p=2$ points est exacte pour un polynome de degré ≤ 3. ~~Ce qui est le cas de $f(\xi) = \xi^2$~~

Exercice 8 *(25pts)* `Approximation par moindres carrés.` La concentration $C(t)$ d'un médicament dans le sang d'un patient, t heures aprés son injection, vérifie la loi $C = \alpha t e^{\beta t}$. Suivez les étapes ci-dessous pour déterminer la meilleure approximation au sens des moindres carrés avec les données ci-contre.

t	1	3	5
C	0.6	0.7	0.4

(1) Linéarisez l'équation $C = \alpha t e^{\beta t}$.

$$\ln C = \underbrace{\ln \alpha}_{\gamma} + \ln t + \beta t \quad 2/$$

$$\gamma + \beta t = \ln\left(\frac{C}{t}\right) \quad 2/$$

(2) Ecrivez le système surdéterminé pour les données du problème en utilisant uniquement des variables. Remplacez les valeur numériques et affichez vos résultats avec 4 chiffres significatifs et arrondi.

$$\gamma + \beta t_i = \ln\left(\frac{C_i}{t_i}\right) \quad 2/$$

$$\begin{bmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ 1 & t_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ln(C_1/t_1) \\ \ln(C_2/t_2) \\ \ln(C_3/t_3) \end{bmatrix} \quad 2/$$

4 chiffres significatifs :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} \gamma \\ \beta \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} -0.5108 \\ -1.455 \\ -2.526 \end{bmatrix}}_{b} \quad 2/$$

(3) Déterminez le système normal. $A^T A x = A^T b$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 9 & 35 \end{bmatrix} \quad 2/$$

$$A^T b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.5108 \\ -1.455 \\ -2.526 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.492 \\ -17.51 \end{bmatrix} \quad 2/$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 9 & 35 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.492 \\ -17.51 \end{bmatrix} \quad 2/$$

(4) Résolvez le système précédent et donnez la solution du problème.

On trouve la solution

2/ $\gamma = 0.0154 \Rightarrow \alpha = e^{\gamma} = 1.016$ 1/

2/ $\beta = -0.5043$

Ce qui donne l'approximation

$$C \simeq t e^{-t/2} \quad 2/$$

(5) Quelle est la concentration du médicament dans le sang $t = 2$ heures aprés l'injection?

$t = 2 \Rightarrow C = 2e^{-2/2} = 0.73$ 2/